10) Έστω $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $f(1)<f(0)<f(3)<f(2)$. ΝΔΟ $\exists\,\xi\in(0,3)$ ώστε $f''(\xi)=0$

<u>ΛΥΣΗ</u>

- f συνεχής στο $[0,1]$
- f παραγωγ. στο $(0,1)$

ΘΜΤ. $\exists\, x_1\in(0,1)$ ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)<0$$

- f συνεχής στο $[1,2]$
- f παραγωγ. στο $(1,2)$

ΘΜΤ. $\exists\, x_2\in(1,2)$ ώστε

$$f'(x_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)>0$$

- f συνεχής στο $[2,3]$
- f παραγωγ. στο $(2,3)$

ΘΜΤ. $\exists\, x_3\in(2,3)$ ώστε

$$f'(x_3)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)<0$$

▸ Στο $[x_1,x_2]$ Θ. Bolzano
- f' συνεχής στο $[x_1,x_2]$
- $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$

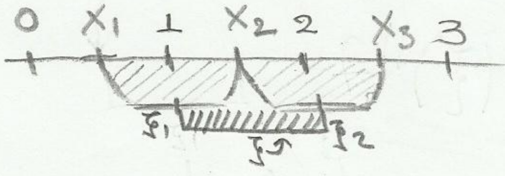
Άρα, $\exists\,\xi_1\in(x_1,x_2):\ f'(\xi_1)=0$

▸ Στο $[x_2,x_3]$ Θ. Bolzano:
- f' συνεχής στο $[x_2,x_3]$
- $f'(x_2)\cdot f'(x_3)<0$

Άρα, $\exists\,\xi_2\in(x_2,x_3):\ f'(\xi_2)=0$

Επομένως, στο $\Delta[\xi_1,\xi_2]$ Θ. Rolle
- f' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$
- f' παραγωγ. στο (ξ_1,ξ_2)
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

Άρα, θα $\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(0,3)$ ώστε: $f''(\xi)=0$



3) α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x>0$ ισχύει η σχέση : $\ln x \leq x-1$.

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0 , +\infty)$ με

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x}, 0<x\neq 1 \\ 0, x=0 \\ -1, x=1 \end{cases}$$

. Να αποδειχθεί ότι :

i) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ,

ii) είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0 , 1)$ και

iii) $f\,'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-x+1$, $x>0$.

Είναι $g\,'(x)=(\ln x)'-(x)'+(1)'=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$, $x>0$. $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ και

$g\,'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<1$, $g\,'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$. Στη θέση $x_o=1$ η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $g(1)=\ln 1-1+1=0$. Έτσι για κάθε $x>0$ θα είναι $g(x)\leq g(1) \Leftrightarrow \ln x-x+1\leq 0$ οπότε $\ln x\leq x-1$.

β) i)Η f είναι συνεχής στο $(0\ ,\ 1)\cup(1\ ,\ +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων .

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}-1} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)'}{(\dfrac{1}{x}-1)'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{-x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (-x)=0=f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο 0 .

Ακόμη $\lim\limits_{x\to 1} f(x)= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{1-x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x\ln x)'}{(1-x)'} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1\cdot \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x}}{-1} = \lim\limits_{x\to 1} (-\ln x-1)$

$= -\ln 1-1= -1= f(1)$, άρα η f είναι συνεχής στο 1 .

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[0\ ,\ +\infty)$.

ii) Για κάθε $x\in(0\ ,\ 1)$ έχουμε

$$f\,'(x)=\frac{(x\ln x)'(1-x)-x\ln x(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{(\ln x+1)(1-x)+x\ln x}{(1-x)^2}=\frac{\ln x-x+1}{(1-x)^2}\ .$$

Σύμφωνα με το (α) ερώτημα για κάθε $x>0$: $\ln x\le x-1 \Leftrightarrow \ln x-x+1\le 0$ με το = να ισχύει μόνο για x=1 .Άρα για κάθε $x\in(0\ ,\ 1)$: $\ln x-x+1<0$, επομένως $f\,'(x)<0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα ,άρα και φθίνουσα στο $(0\ ,\ 1)$.

iii) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου. Έχουμε :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x\ln x}{1-x}-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x+1-x}{-(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x+1-x)'}{(-(x-1)^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{-2(x-1)(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{-2(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(-2(x-1))'}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}\ .$$

Άρα $f\,'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 15. **Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ $(\alpha<\beta)$ με $f(\alpha)=-\alpha$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-\frac{\alpha+\beta}{2}$ και $f(\beta)=-\beta$. Ακόμα, η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'''(x)<0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι: 1) Η C_f έχει ακριβώς ένα πιθανό σημείο καμπής. 2) Η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής. 3) Αν $-\beta<\alpha<0$, τότε η f έχει το πολύ τρεις ρίζες στο διάστημα (α, β), εκ των οποίων η μία τουλάχιστον είναι μικρότερη του $\frac{\alpha+\beta}{2}$.**

ΛΥΣΗ. 1) Από το θεώρημα μέσης τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, έπεται ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1\in\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ με: $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta}=\dfrac{-\frac{\alpha+\beta}{2}+\alpha}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=-1$

και όμοια $f'(\xi_2)=\ldots=-1$. Προφανώς: $\alpha<\xi_1<\xi_2<\beta$. Από το θεώρημα του Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, έπεται ότι υπάρχει αριθμός $\xi\in(\xi_1, \xi_2)$ με $f''(\xi)=0$. Άρα, το σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι πιθανό σημείο καμπής της C_f. Και επειδή $f''\downarrow(\alpha, \beta)$, αφού $f'''(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, έπεται ότι το σημείο αυτό M είναι το μοναδικό πιθανό σημείο καμπής (η f'' δεν μπορεί να μηδενίζεται σε άλλο σημείο).

2) Επειδή $f''\downarrow(\alpha, \beta)$, έχουμε:

$$\alpha<\xi_1<x<\xi<\beta\Rightarrow f''(x)>f''(\xi)=0\Rightarrow[f \text{ κυρτή στο } (\xi_1,\xi)] \text{ και}$$
$$\alpha<\xi<x<\xi_2<\beta\Rightarrow f''(x)<f''(\xi)=0\Rightarrow[f \text{ κοίλη στο } (\xi,\xi_2)].$$

Συμπεράνουμε ότι το σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f.

3) Έστω ότι $-\beta<\alpha<0$. Τότε $\alpha<0$, $\beta>0$ και $\frac{\alpha+\beta}{2}>0$. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει τέσσερες ρίζες στο (α, β), τις $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$. Έτσι, από το θεώρημα του Rolle, η συνάρτηση f' θα έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες στο (α, β), τις $\eta_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $\eta_2\in(\rho_2,\rho_3)$ και $\eta_3\in(\rho_3,\rho_4)$. Όμοια, η συνάρτηση f'' θα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (α, β), μία στο διάστημα (η_1,η_2) και μία στο (η_2,η_3). Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $f''\downarrow(\alpha, \beta)$. Άρα η συνάρτηση f έχει το πολύ τρεις ρίζες στο διάστημα (α, β).

Επειδή $f(\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\alpha\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}<0$, από το θεώρημα του Bolzano για την f στο διάστημα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, έπεται ότι μία τουλάχιστον ρίζα της f είναι στο διάστημα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και άρα είναι μικρότερη του $\frac{\alpha+\beta}{2}$.